

7. 軸受の振動

「振動」とは一点を中心として前後左右に周期的運動を繰り返す現象であり、簡単にいえば物体を揺らす運動である。この物体の揺れ(物体の振動)が、主に空気等の媒体を通して人間の耳に届いたものが「音」である。

転がり軸受は回転によって振動を発生し、軸受が組み込まれた機械や装置を振動させることによって騒音を発生させることがある。音の発生源は振動であることから、この章では主に軸受の振動について説明する。振動には軸受の回転によって発生する振動(強制振動)と軸受が固有に持っている振動(固有振動)があるが、それぞれの特徴を利用して判別することができる。

7.1 強制振動

- ・ 軸受が回転することによって発生する振動である。
- ・ 回転速度の変化に応じて発生周波数が変化する。
→ 回転速度を変化させ、周波数が移動すれば強制振動である。

7.1.1 回転による振動

回転により発生するそれぞれの回転周波数を図 7.1 に示す。

1) 回転周波数: f_r (Hz)

回転する物体の回転周波数
内輪回転の場合

$$f_r = f_i = \frac{n_i}{60} : \text{内輪回転周波数}$$

n_i : 内輪回転速度 (min⁻¹)

外輪回転の場合

$$f_r = f_e = \frac{n_e}{60} : \text{外輪回転周波数}$$

n_e : 外輪回転速度 (min⁻¹)

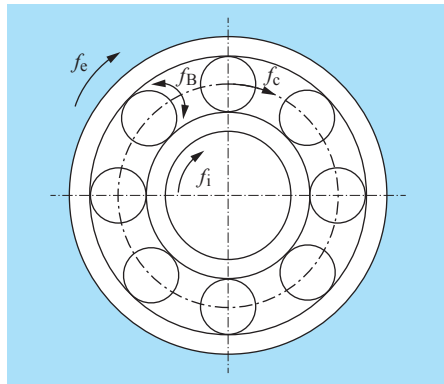


図 7.1 回転周波数

2) 保持器回転周波数: f_c (Hz)

保持器回転周波数と転動体公転周波数は同じものである。

$$f_c = \frac{1}{2} f_r (1 \mp \gamma) \dots\dots\dots (7.1)$$

ここで、符号 上段: 内輪回転, 下段: 外輪回転

$$\gamma = \frac{D_w \cos \alpha}{D_{pw}} \quad \text{または} \quad \gamma = \frac{D_{we} \cos \alpha}{D_{pw}}$$

D_w : 玉径 (mm)

D_{we} : 計算に用いるころの直径 (mm)

D_{pw} : 転動体ピッチ径 (mm)

3) 保持器相対回転周波数: f_{cr} (Hz)

この回転周波数は回転軸に対する保持器の相対回転周波数である。内輪回転の場合は内輪に対する保持器の相対回転速度、外輪回転の場合は外輪に対する保持器の相対回転速度である。

$$f_{cr} = \frac{1}{2} f_r (1 \pm \gamma) \dots\dots\dots (7.2)$$

ここで、符号 上段: 内輪回転, 下段: 外輪回転

4) 転動体自転周波数: f_B (Hz)

転動体が自転する時の周波数である。内輪回転と外輪回転では回転方向は逆になるが、周波数の計算式は同一になる。

$$f_B = \frac{1}{2} \frac{D_{pw}}{D_w} f_r (1 - \gamma^2) \dots\dots\dots (7.3)$$

7.1.2 構造による振動

転がり軸受は有限個の転動体で支持されているため、転動体の位置によって回転軸の中心(軸心)は変動する。転がり軸受は構造上、図 7.2 (a) のように転動体が荷重方向に対して真下にある場合と図 7.2 (b) のように両側にある場合を繰り返す、それによって振動を発生する。この振動は転動体が通過するたびに発生するため、転動体通過振動という。特に、使用時に内部すきまが残留していると軸心の変動が顕著に表れるが、内部すきまがない場合でも荷重が負荷される転動体個数が変化することによって転動体の弾性変形量が変わり、軸心の変動が発生する。

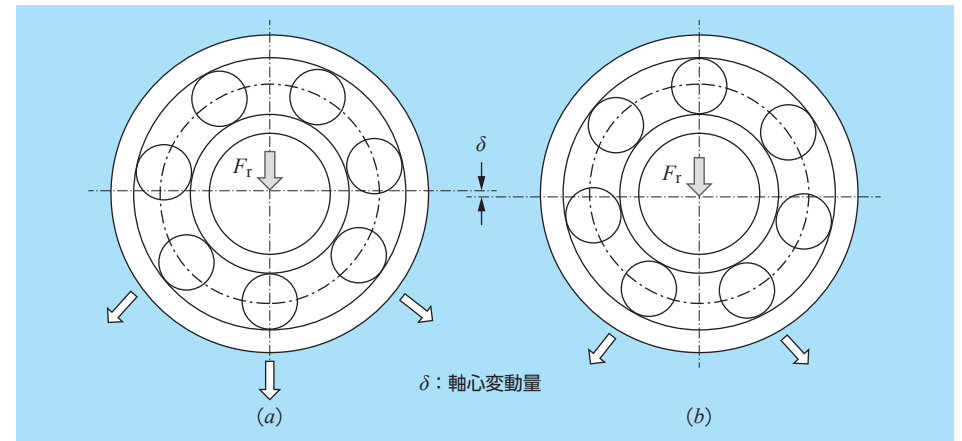


図 7.2 転動体通過振動

転動体通過振動の周波数 (f_p) は下式で求めることができる。

$$f_p = n Z f_c \text{ (Hz)} \dots\dots\dots (7.4)$$

Z : 転動体個数, n : 次数 (整数)

7.1.3 軌道面の損傷による振動

軸受には組み込み時の圧痕や使用時に発生したフレーキング、スミアリングによって軌道面および転動面に損傷が発生する場合があります。これらが図7.3のように1個所に発生した場合（スポット傷）は特定の周波数で振動が発生する。

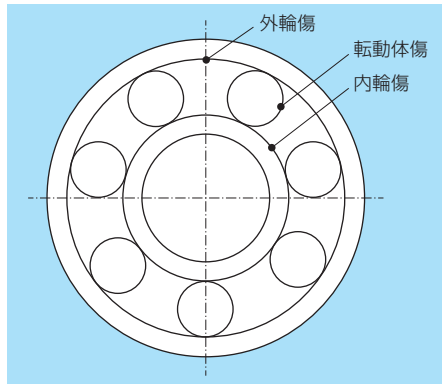


図 7.3 軌道面および転動面のきず

1) 固定輪のきず

静止したきずの上を転動体が通過するため、前項で述べた転動体通過振動と同じ周波数が発生する。

固定輪：内輪回転の場合は外輪
外輪回転の場合は内輪

$$f = nZf_c = \frac{1}{T} \text{ (Hz)} \dots\dots\dots (7.5)$$

Z：転動体個数
f_c：保持器回転周波数
n：次数（整数）
T：きずによる振動の周期

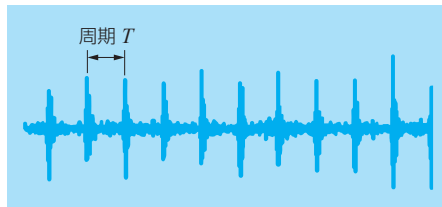


図 7.4 固定輪のきず波形

2) 回転輪のきず

回転している軌道輪の上を転動体が通過するため、回転輪と保持器の相対回転速度と転動体個数より下式となる。

回転輪：内輪回転の場合は内輪
外輪回転の場合は外輪

$$f = nZf_{cr} = \frac{1}{T} \text{ (Hz)} \dots\dots\dots (7.6)$$

および $f = nZf_{cr} \pm f_r \text{ (Hz)} \dots (7.7)$
Z：転動体個数, n：次数（整数）
T：きずによる振動の周期, T_r：回転輪の回転周期
f_{cr}：保持器相対回転周波数
f_r：回転周波数

振動の測定点（固定輪）に対して回転輪のきずの位置は回転周波数（f_r）で変化するため、f_rの振幅変調がかかる場合がある。

3) 転動体のきず

転動体は1回転で内輪と外輪に接触するため、転動体の自転周波数の2倍となり下式となる。

$$f = 2nf_B = \frac{1}{T} \text{ (Hz)} \dots\dots\dots (7.8)$$

および $f = 2nf_B \pm f_c \dots\dots\dots (7.9)$

f_B：転動体自転周波数
n：次数（整数）
f_c：転動体公転周波数

振動の測定点に対して転動体の傷の位置は公転周波数（f_c）で変化するため、f_cの振幅変調がかかる場合がある。

T：きずによる振動の周期, T_c：転動体公転の周期

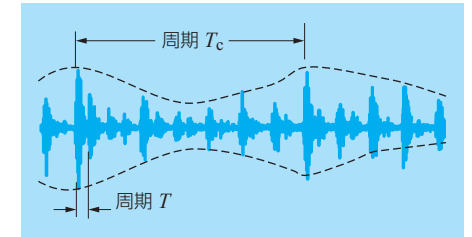


図 7.6 転動体のきず波形

7.1.4 形状による振動：軌道面および転動面の形状

純アキシアル荷重状態でのラジアル玉軸受の内外輪の軸心間振動がGustafssonによって解析され、軌道面および転動面のうねりの山数と発生する振動周波数が求められている。うねりにより発生する振動メカニズムを図7.7および図7.8に示す。また、これらの振動が発生する条件（うねりの山数）と発生周波数を表7.1に示す。図7.7は転動体個数が7個、内輪が6角形変形をしている場合の軸心の変動を表したものである。最下点の転動体と内輪の凸部が一致する(A)図の状態の時に軸心は最も上となり、凹部が一致する(B)図の時に軸心が最も下となることにより、軸受は径方向振動を発生させる。これは、うねりの角数がnz ± 1の場合に、最も顕著となる。

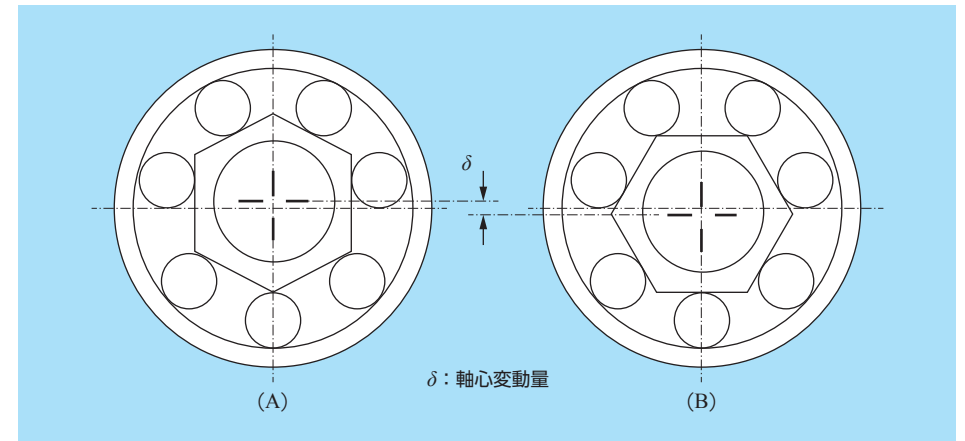


図 7.7 振動メカニズム（玉：7個、内輪：6角形）

Huston は純アキシャル荷重が作用した玉軸受において、ボールを支点とした固有振動数の計算式を以下に示している。

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{n^2 (n^2 - 1)^2 \frac{EI\pi g}{R_m^3} + \frac{K_\delta Z}{2}}{9.8\rho A\pi R_m (n^2 + 1)}} \dots\dots\dots (7.12)$$

ここで、 K_δ ：純アキシャル荷重における玉 1 個当たりのばね定数

$$\frac{K_\delta Z}{2} = \frac{\partial R}{\partial y} : \text{アキシャル荷重による径方向ばね定数}$$

通常の使用条件では分子第 2 項の径方向ばね定数は第 1 項の数値に比べて非常に小さいため省略することができる。その場合式 (7.12) は式 (7.11) と同一となる。また、振動モード以外を K_n としてまとめると、 K_n は軸受ごとに定まる定数となる。

$$\text{固有振動数} : f_n = \frac{n(n^2 - 1)}{\sqrt{n^2 + 1}} K_n \dots\dots\dots (7.13)$$

n : 振動モードによる数値

K_n : 曲げたわみ固有振動係数

$$K_n = \frac{1}{2\pi R_m^2} \sqrt{\frac{EIg}{9.8\rho A}} \dots\dots\dots (7.14)$$

通常は、内輪が軸に締めりばめで固定され、外輪がすきまばめで使用されることが多いことから外輪がフリーの円環と見なされる。従って、外輪は単独の固有振動数として発生し易いため、深溝玉軸受およびアンギュラ玉軸受外輪の K_n を表 7.2 に示す。

表 7.2 曲げたわみ固有振動係数 K_n (玉軸受, 外輪)

内径 番号	$K_n \times 10^3$				
	軸受系列				
	68, 78	69, 79	60, 70	62, 72	63, 73
00	3.598	3.499	3.293	3.071	2.808
01	3.003	2.979	2.863	2.713	2.521
02	2.371	2.402	2.352	2.290	2.121
03	2.063	2.120	2.092	2.015	1.883
04	1.778	1.802	1.770	1.714	1.647
05	1.383	1.436	1.440	1.419	1.344
06	1.117	1.178	1.202	1.184	1.134
07	0.927	1.011	1.030	1.016	0.988
08	0.787	0.881	0.899	0.894	0.869
09	0.693	0.776	0.797	0.800	0.775
10	0.630	0.682	0.711	0.721	0.700
11	0.576	0.623	0.650	0.656	0.638
12	0.525	0.563	0.591	0.601	0.586
13	0.487	0.511	0.541	0.555	0.541
14	0.445	0.485	0.505	0.515	0.503
15	0.408	0.447	0.468	0.480	0.470
16	0.376	0.413	0.442	0.450	0.441
17	0.369	0.396	0.413	0.424	0.416
18	0.343	0.370	0.392	0.401	0.393
19	0.321	0.347	0.369	0.380	0.372
20	0.301	0.335	0.348	0.361	0.352
21	0.283	0.316	0.333	0.343	0.336
22	0.280	0.299	0.320	0.328	0.319
24	0.251	0.276	0.290	0.301	0.293
26	0.236	0.256	0.270	0.277	0.271
28	0.215	0.234	0.249	0.258	0.252
30	0.204	0.223	0.232	0.240	0.235

$$E = 208\,000 \text{ (MPa)}, \quad g = 9\,800 \text{ (mm/s}^2\text{)}$$

$$\rho = 7.8 \times 10^{-6} \text{ (kg/mm}^3\text{)}$$

7.2.2 軸受固有振動

軸受を外輪が回転体で支えられた振動系であると考え、各方向成分の固有振動数の計算式は以下のよう求められる。

1) 軸方向固有振動数

図 7.10 に軸方向振動のイメージを示す。固有振動数の一般式より軸方向固有振動数は下式の通りである。

$$f_T = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\partial T}{\partial x}} g \dots\dots\dots (7.15)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{2^{3/4} \left(\frac{1}{K}\right)^{3/8} Z^{1/4}}{(\alpha + \beta)^{5/8} D_w^{1/2}} T^{3/4} \dots\dots\dots (7.16)$$

- ここで、 W : 外輪質量 (kg)
- g : 重力加速度 9800 (mm/s²)
- D_w : 玉径 (mm)
- Z : 玉個数
- α : 玉半径に対する内輪溝曲率半径の増加率
- β : 玉半径に対する外輪溝曲率半径の増加率
- K : 溝曲率比に対する定数
- T : アキシアル荷重 (N)

式 (7.15), 式 (7.16) より

$$f_T = \frac{1}{2\pi \times 9.8^{3/8}} \sqrt{\frac{g}{W} \frac{2^{3/4} \left(\frac{1}{K}\right)^{3/8} Z^{1/4}}{(\alpha + \beta)^{5/8} D_w^{1/2}}} T^{3/8} = K_T T^{3/8} \dots\dots\dots (7.17)$$

$$K_T = \frac{1}{2\pi \times 9.8^{3/8}} \sqrt{\frac{g}{W} \frac{2^{3/4} \left(\frac{1}{K}\right)^{3/8} Z^{1/4}}{(\alpha + \beta)^{5/8} D_w^{1/2}}} \dots\dots\dots (7.18)$$

軸方向固有振動数の係数 K_T を表 7.3 に示す。

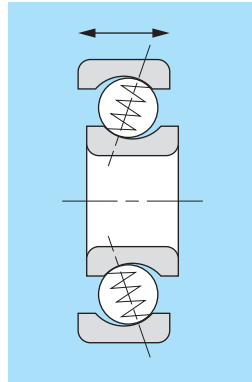


図 7.10 軸方向振動

2) 径方向固有振動数

図 7.11 に径方向振動のイメージ図, 式 (7.19) に径方向固有振動数を示す。

$$f_R = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\partial R}{\partial y}} g \dots\dots\dots (7.19)$$

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{3}{2^{3/4}} \left(\frac{1}{K}\right)^{9/8} D_w^{1/2} (\alpha + \beta)^{1/8} Z^{3/4} \frac{T^{1/4}}{9.8^{1/4}} \dots\dots (7.20)$$

* $g, D_w, Z, \alpha, \beta, K, T$ の記号は前項同様

式 (7.19), 式 (7.20) より

$$f_R = \frac{1}{2\pi \times 9.8^{1/8}} \sqrt{\frac{g}{W} \frac{3}{2^{3/4}} \left(\frac{1}{K}\right)^{9/8} D_w^{1/2} (\alpha + \beta)^{1/8} Z^{3/4} T^{1/8}} \dots\dots\dots (7.21)$$

$$= K_R T^{1/8}$$

$$K_R = \frac{1}{2\pi \times 9.8^{1/8}} \sqrt{\frac{g}{W} \frac{3}{2^{3/4}} \left(\frac{1}{K}\right)^{9/8} D_w^{1/2} (\alpha + \beta)^{1/8} Z^{3/4}} \dots\dots\dots (7.22)$$

径方向固有振動数の係数 K_R を表 7.4 に示す。

3) 傾斜方向固有振動数

図 7.12 に傾斜方向振動のイメージ図, 式 (7.23) に傾斜方向固有振動数を示す

$$f_M = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\partial M}{\partial l}} g \dots\dots\dots (7.23)$$

$$\frac{\partial M}{\partial l} = \frac{\left(\frac{1}{K}\right)^{3/8} D_p^2 Z^{1/4}}{2^{3/4} (\alpha + \beta)^{5/8} D_w^{1/2}} \frac{T^{3/4}}{9.8^{3/4}} \dots\dots\dots (7.24)$$

* $g, Z, \alpha, \beta, K, T$ の記号は前項同様

- D_{pw} : 回転体ピッチ径 (mm)
- I_0 : 軸直角断面において外輪中心を通る軸回りの慣性モーメント

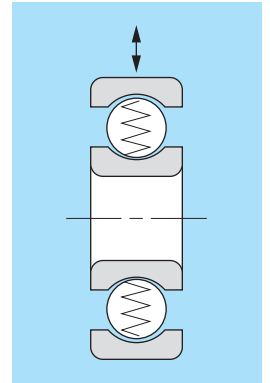


図 7.11 径方向振動

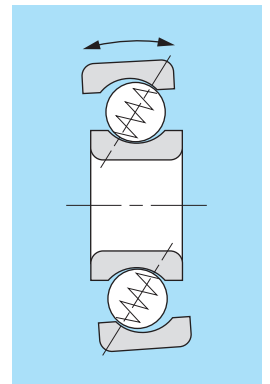


図 7.12 傾斜方向振動

式 (7.23), 式 (7.24) より

$$f_M = \frac{1}{2\pi \times 9.8^{3/8}} \sqrt{\frac{g}{I_0} \frac{\left(\frac{1}{K}\right)^{3/8} D_p^2 Z^{1/4}}{2^{3/4} (\alpha + \beta)^{5/8} D_w^{1/2}}} T^{3/8} = K_M T^{3/8} \dots\dots\dots (7.25)$$

$$K_M = \frac{1}{2\pi \times 9.8^{3/8}} \sqrt{\frac{g}{I_0} \frac{\left(\frac{1}{K}\right)^{3/8} D_p^2 Z^{1/4}}{2^{3/4} (\alpha + \beta)^{5/8} D_w^{1/2}}} T^{3/8} \dots\dots\dots (7.26)$$

傾斜方向固有振動数の係数 K_M を表 7.5 に示す。

表 7.3 軸方向固有振動係数 K_T (玉軸受, 外輪)

内径 番号	$K_T \times 10^2$				
	軸受系列				
	68, 78	69, 79	60, 70	62, 72	63, 73
00	23.24	15.93	8.89	7.20	4.76
01	21.89	15.20	8.59	6.19	4.27
02	20.27	12.18	7.36	5.37	3.75
03	19.45	11.22	6.11	4.36	3.16
04	11.56	7.55	4.54	3.40	2.73
05	10.58	7.04	4.71	3.11	2.09
06	9.85	6.55	3.83	2.42	1.71
07	9.16	5.10	3.23	1.94	1.44
08	8.58	4.02	2.92	1.69	1.19
09	7.86	3.78	2.55	1.71	1.10
10	6.72	3.69	2.46	1.63	0.95
11	5.03	3.06	1.94	1.38	0.58
12	4.24	2.95	1.88	1.19	0.72
13	3.89	2.86	1.83	1.05	0.54
14	3.76	2.14	1.49	0.99	0.57
15	3.64	2.07	1.46	0.95	0.51
16	3.52	2.02	1.22	0.84	0.46
17	2.51	1.62	1.19	0.75	0.42
18	2.44	1.58	1.01	0.65	0.39
19	2.37	1.55	1.00	0.58	0.35
20	2.31	1.28	0.97	0.52	0.31
21	2.25	1.25	0.85	0.47	0.29
22	1.80	1.23	0.74	0.43	0.26
24	1.66	1.02	0.71	0.39	0.23
26	1.32	0.87	0.57	0.36	0.21
28	1.28	0.84	0.55	0.32	0.18
30	1.05	0.66	0.49	0.29	0.17

$$g = 9\,800 \text{ (mm/s}^2\text{)}, \rho = 7.8 \times 10^{-6} \text{ (kg/mm}^3\text{)}$$

表 7.4 径方向固有振動係数 K_R (玉軸受, 外輪)

内径 番号	$K_R \times 10^2$				
	軸受系列				
	68, 78	69, 79	60, 70	62, 72	63, 73
00	156.08	117.51	82.02	68.67	51.72
01	150.24	115.07	81.96	61.64	48.97
02	144.61	99.15	72.29	57.15	44.63
03	143.42	97.63	62.97	49.22	39.44
04	98.16	71.69	51.47	41.87	35.61
05	93.12	69.74	50.40	39.43	29.45
06	90.70	66.10	44.55	33.57	25.84
07	86.63	55.61	39.59	29.19	23.09
08	83.04	46.88	36.61	26.19	20.24
09	78.61	45.51	34.20	25.28	18.51
10	70.82	45.14	33.56	24.62	16.59
11	56.83	39.07	28.24	22.19	21.22
12	51.09	38.20	27.92	20.17	13.67
13	47.50	38.15	27.60	18.26	14.91
14	46.94	30.62	23.79	17.57	11.56
15	46.36	30.16	23.63	17.35	10.72
16	45.15	29.71	20.65	15.52	9.98
17	35.13	25.26	20.59	14.57	9.32
18	34.47	25.03	18.19	13.06	8.74
19	33.85	24.79	18.19	12.08	8.23
20	33.26	21.40	17.75	11.23	7.62
21	32.70	21.29	16.26	10.47	7.21
22	27.85	21.17	14.59	9.81	6.79
24	26.64	18.46	14.36	9.06	5.99
26	22.50	16.58	12.12	8.62	5.53
28	22.13	16.24	11.98	7.71	5.08
30	19.24	13.56	11.06	7.13	4.87

$$g = 9\,800 \text{ (mm/s}^2\text{)}, \rho = 7.8 \times 10^{-6} \text{ (kg/mm}^3\text{)}$$

表 7.5 傾斜方向固有振動係数 K_M (玉軸受, 外輪)

内径 番号	$K_M \times 10^2$				
	軸受系列				
	68, 78	69, 79	60, 70	62, 72	63, 73
00	18.53	12.16	6.38	5.19	3.33
01	17.98	11.97	6.60	4.46	2.97
02	17.22	9.79	5.65	4.00	2.76
03	16.81	9.20	4.74	3.28	2.26
04	9.81	6.09	3.56	2.61	1.99
05	9.25	5.88	3.77	2.43	1.55
06	8.80	5.62	3.14	1.90	1.31
07	8.33	4.38	2.65	1.52	1.09
08	7.90	3.46	2.43	1.33	0.91
09	7.27	3.29	2.14	1.38	0.86
10	6.20	3.27	2.09	1.33	0.74
11	4.63	2.70	1.64	1.13	0.45
12	3.90	2.63	1.61	0.99	0.56
13	3.58	2.57	1.58	0.86	0.42
14	3.49	1.90	1.28	0.81	0.44
15	3.40	1.86	1.26	0.80	0.40
16	3.29	1.83	1.05	0.69	0.36
17	2.32	1.45	1.03	0.62	0.33
18	2.26	1.42	0.87	0.54	0.30
19	2.21	1.40	0.86	0.48	0.28
20	2.16	1.15	0.85	0.43	0.24
21	2.11	1.13	0.74	0.39	0.23
22	1.67	1.11	0.64	0.35	0.21
24	1.55	0.92	0.62	0.32	0.18
26	1.23	0.78	0.49	0.30	0.16
28	1.20	0.76	0.48	0.27	0.14
30	0.98	0.59	0.43	0.24	0.13

$$g = 9\,800 \text{ (mm/s}^2\text{)}, \rho = 7.8 \times 10^{-6} \text{ (kg/mm}^3\text{)}$$

7.3 振動波形の実効値

7.3.1 実効値とは

本来、交流電圧の強さを表す概念として考えられたもので、変化する信号の平均的な大きさ（強度）を表す量であるが、振動波形も変化する物理量であるため、同様に、定義される。

$$\text{実効値} : x_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T x(t)^2 dt} \dots\dots\dots (7.27)$$

T : 周期 $x(t)$: 周期信号

この式は変化する波形の二乗値の平均の平方根 (*root mean square*) であるため頭文字をとって“rms” = 実効値といわれている。

従って、振幅 V の正弦波 ($\sin \omega t$) の実効値 V_{rms} は下式となる。

$$V_{\text{rms}} = \frac{V}{\sqrt{2}} = 0.707V \dots\dots\dots (7.28)$$

7.3.2 交流波形と実効値

直流電圧は電圧が一定のため、電圧の大きさを、例えば 100V の電圧と定義できるが、交流電圧は、**図 7.13** のように変動するためどの数値をもって定義すれば良いかわからない。従って、交流電圧の大きさすなわち実効値は、以下に定義されている。

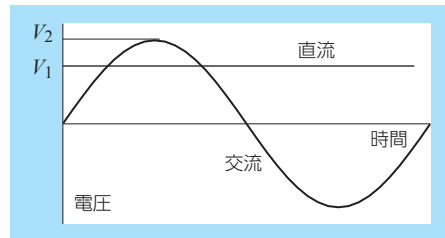


図 7.13 交流波形と直流波形

【実効値の定義】：直流の電圧と同じ仕事をする交流の電圧

* 電気の場合、仕事とは電力のことである

直流電圧を V_{DC} 、交流電圧を V_{AC} とすると、**図 7.13** の記号を使えば、

$$V_{\text{DC}} = V_1$$

$$V_{\text{AC}} = V_2 \sin t$$

電力 (P) の定義より

$$P = \frac{V^2}{R}$$

V : 電圧 R : 抵抗

直流と交流の一定時間 (T) の総電力量は

$$P_{\text{DC}} T = \frac{V_{\text{DC}}^2 T}{R} = \frac{V_1^2 T}{R}$$

$$P_{\text{AC}} T = \frac{V_2^2}{R} \int_0^T \sin^2 t dt$$

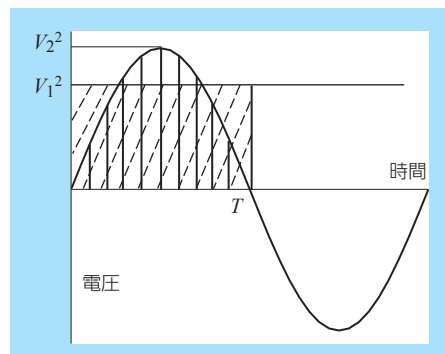


図 7.14 電力イメージ

$P_{\text{DC}} T = P_{\text{AC}} T$ とおくと

$$V_1^2 T = V_2^2 \int_0^T \sin^2 t dt$$

$$\therefore V_1 = V_2 \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \sin^2 t dt}$$

↓
実効値 (rms)

$T = 2\pi$ として考えると

$$V_1 = V_2 \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 t dt}$$

$$= V_2 \sqrt{\frac{1}{2\pi} \left[\frac{t}{2} - \frac{1}{4} \sin 2t \right]_0^{2\pi}}$$

..... (7.29)

$$= V_2 \sqrt{\frac{1}{2\pi} \left\{ \left[\frac{2\pi}{2} - \frac{1}{4} \sin 4\pi \right] - \left[\frac{t}{2} \times 0 - \frac{1}{4} \sin(2 \times 0) \right] \right\}}$$

$$= \frac{V_2}{\sqrt{2}}$$

従って、交流電圧を正弦波と考えると実効値とピーク値の関係は下式となる。

$$(\text{実効値}) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\text{ピーク値}) \dots\dots\dots (7.30)$$

7.3.3 波形の大きさと実効値

交流電圧や振動などの変動する信号や物理量の大きさ（強度）は平均値で表すのが一般的である。平均処理の方法には算術平均、二乗平均、幾何平均等のいろいろな方法があるが、ここでは算術平均と二乗平均（実効値）の 2 通りの方法を比較した。

- ① 算術平均：交流のような正弦波の場合はそのまま平均すると 0 になるため、絶対値を取って平均する。
- ② 二乗平均 = 実効値

【1】基本的な正弦波

振幅 A 、周期 T の最も単純な下記の正弦波で絶対値平均と二乗平均を求める。

$$x(t) = A \cos(2\pi f t)$$

$$f: \text{周波数} \quad f = 1/T$$

* ここでは、波形が 1/2 周期で対称になる cos (余弦波) を用いる

1) 算術平均

基本式より絶対値の平均を求める。

$$\begin{aligned} |\bar{x}| &= \frac{1}{T} \int_0^T |\bar{x}(t)| dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T |A \cos(2\pi f t)| dt \end{aligned}$$

波形と周期の関係を図 7.15 に示す。
1/4 周期～3/4 周期の間がマイナスとなるため、折り返して積分する。

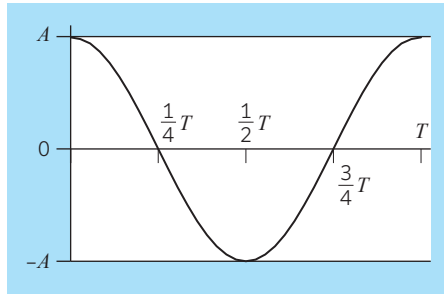


図 7.15 波形と周期

$$\begin{aligned} |\bar{x}| &= \frac{A}{T} \left\{ \int_0^{T/4} \cos(2\pi f t) dt - \int_{T/4}^{3T/4} \cos(2\pi f t) dt + \int_{3T/4}^T \cos(2\pi f t) dt \right\} \\ &= \frac{A}{2\pi f T} \left\{ [\sin 2\pi f t]_0^{T/4} - [\sin 2\pi f t]_{T/4}^{3T/4} + [\sin 2\pi f t]_{3T/4}^T \right\} \\ &= \frac{A}{2\pi} \left\{ \left[\sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 \right] - \left[\sin \frac{3\pi}{2} - \sin \frac{\pi}{2} \right] + \left[\sin 2\pi - \sin \frac{3\pi}{2} \right] \right\} \\ &= \frac{A}{2\pi} \left\{ (1 - 0) - (-1 - 1) + (0 + 1) \right\} \\ &= \frac{2}{\pi} A \end{aligned}$$

2) 二乗平均：実効値

基本式より二乗平均を求める。

$$\begin{aligned} x_{\text{rms}} &= \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T x(t)^2 dt} \\ &= \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T A^2 \cos^2(2\pi f t) dt} \\ &= \sqrt{\frac{A^2}{T} \left[\frac{t}{2} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{2\pi f} \sin(2 \times 2\pi f t) \right]_0^T} \\ &= \sqrt{\frac{A^2}{T} \times \frac{T}{2}} = \frac{A}{\sqrt{2}} \dots\dots\dots (7.31) \end{aligned}$$

3) 正弦波の平均値と実効値

単純な正弦波であれば、算術平均および実効値共、振幅の一定倍となり、どちらも振幅の強さを表す指標となりうる。

算術平均：振幅の 2/π 倍

実効値：振幅の 1/√2 倍

また、平均値と実効値の比は約 1.11 倍となる。

$$\frac{\text{実効値}}{\text{平均値}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 1.11 \dots\dots\dots (7.32)$$

[2] 複合した正弦波

1 つの単純な正弦波ではなく、振幅と周波数が異なる複合した正弦波で考える。

$$x(t) = A_1 \cos(2\pi f_1 t) + A_2 \cos(2\pi f_2 t - \phi)$$

A_1, A_2 : 振幅 f_1, f_2 : 周波数
 ϕ : 位相

1) 複合波形の平均値

$$|\overline{x(t)}| = \frac{1}{T} \int_0^T |A_1 \cos(2\pi f_1 t) + A_2 \cos(2\pi f_2 t - \phi)| dt$$

複関数を解析で求めるのは困難なため、3 つの具体例で数値計算を行う。

表 7.6 計算条件

振幅	$A_1 = 3, A_2 = 2$		
周波数	$f_1 = 1, f_2 = 2$	$f_1 = 1, f_2 = 3$	
位相	0	90°	0
条件	①基準	②位相変化	③周波数変化

①基準の場合

$$A_1 = 3, A_2 = 2, f_1 = 1, f_2 = 2, \phi = 0$$

$$x(t) = 3\cos(2\pi t) + 2\cos(4\pi t)$$

図 7.16 は合成前の 2 つの波形、図 7.17 は合成後の波形を表したものである。図 7.17 において負の領域は 0.18 ~ 0.82 の範囲となる。また、この波形は 0.5 周期で対称なため、0.5 周期分を折り返して積分する。

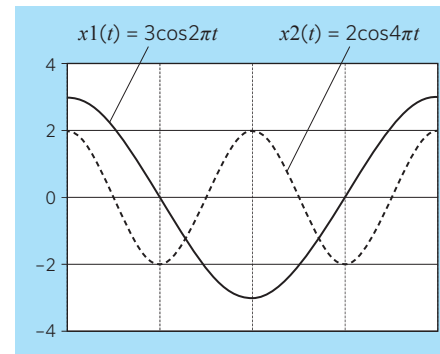


図 7.16 合成前の波形

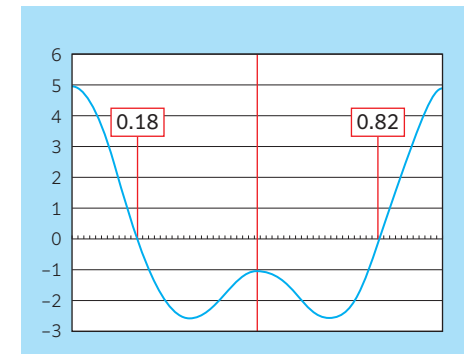


図 7.17 合成後の波形

$$\begin{aligned}
 |\bar{x}| &= \frac{1}{0.5} \int_0^{0.5} |3\cos 2\pi t + 2\cos 4\pi t| dt \\
 &= \frac{1}{0.5} \left\{ \int_0^{0.18} (3\cos 2\pi t + 2\cos 4\pi t) dt - \int_{0.18}^{0.5} (3\cos 2\pi t + 2\cos 4\pi t) dt \right\} \\
 &= \frac{1}{0.5} \left\{ \left[\frac{3}{2\pi} \sin 2\pi t + \frac{2}{4\pi} \sin 4\pi t \right]_0^{0.18} - \left[\frac{3}{2\pi} \sin 2\pi t + \frac{2}{4\pi} \sin 4\pi t \right]_{0.18}^{0.5} \right\} \\
 &= 2.2197
 \end{aligned}$$

条件②, ③も同様に計算すると下表のようになる。

表 7.7 条件ごとの平均値

条件	平均値
①基準	2.220
②位相変化	1.988
③周波数変化	1.869

表 7.8 に示すように、複合した位相や周波数の成分によって平均値の大きさは変化する。



平均値は振幅の強さを表す指標にはならない。

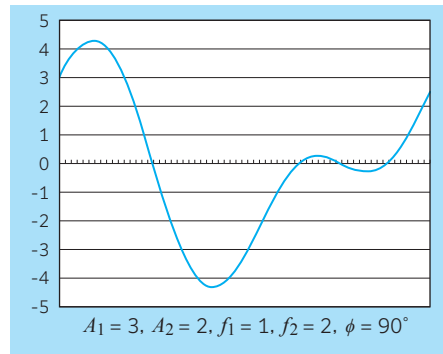


図 7.18 条件②の合成波形

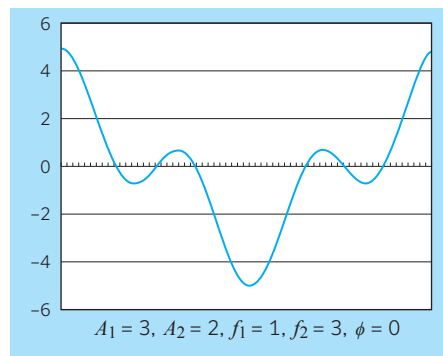


図 7.19 条件③の合成波形

2) 複合波形の実効値

複合波形の一般式より

$$\begin{aligned}
 x_{\text{rms}} &= \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \{A_1 \cos 2\pi f_1 t + A_2 \cos 2\pi f_2 t\}^2 dt} \\
 &= \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \{A_1^2 \cos^2 2\pi f_1 t + A_2^2 \cos^2 2\pi f_2 t + 2A_1 A_2 \cos 2\pi f_1 t \cos 2\pi f_2 t\} dt}
 \end{aligned}$$

三角関数を 1 周期分積分すれば 0 になるため、第 3 項は 0 となる。

$$x_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T A_1^2 \cos^2 2\pi f_1 t dt + \frac{1}{T} \int_0^T A_2^2 \cos^2 2\pi f_2 t dt}$$

また、実効値の定義式 (7.31) から

$$\sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T A^2 \cos^2(2\pi f t) dt} = \frac{A}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{A^2}{2}}$$

$$\therefore x_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{A_1^2}{2} + \frac{A_2^2}{2}} = \sqrt{\frac{3^2}{2} + \frac{2^2}{2}} = 2.550$$

実効値は複合した位相や周波数の成分にかかわらず振幅の大きさに依存する。



実効値は振幅の強さを表す指標になる。

3) 複合波の平均値と実効値

表 7.8 に各条件での平均値と実効値およびその比を示す。

表 7.8 各条件での平均値と実効値

条件	平均値	実効値	実効値/平均値
①基準	2.220	2.550	1.15
②位相変化	1.988	2.550	1.36
③周波数変化	1.869	2.550	1.28

以上の結果から、波形の強さ (大きさ) を表す指標 (パラメータ) としては平均値よりも「実効値」が相応しい。従って、振動に関しても強さを表す数値として実効値を用いることが一般的である。

【計算例】軸受の強制振動

(7-1) 深溝玉軸受 6206 が $n = 1800 \text{ min}^{-1}$ の回転速度で使用されている時、この軸受から発生する強制振動数を求める。また、軸受部品（内輪、外輪、玉）にきずがある場合および変形がある場合の特徴的な角数と周波数を求める。内径 $d = 30 \text{ mm}$ 、外径 $D = 62 \text{ mm}$ 、玉個数 $Z = 9$ とする。

1) 回転による振動

① 回転周波数： f_r

$$f_r = f_i = \frac{n_i}{60} = \frac{1800}{60} = 30 \text{ (Hz)}$$

② 保持器回転周波数（外輪に対する保持器相対回転周波数）： f_c

$$f_c = \frac{1}{2} f_r (1 - \gamma)$$

$$\text{ここで、} \gamma = \frac{D_w \cos \alpha}{D_{pw}}$$

$$\text{第1章式(1.22)より、} \frac{D_w}{D_{pw}} = 0.6 \frac{D-d}{D+d} = 0.6 \times \frac{62-30}{62+30} = 0.209$$

接触角 $\alpha = 0$ とすると、

$$\gamma = \frac{D_w \cos \alpha}{D_{pw}} = 0.209 \cos 0 = 0.209$$

$$f_c = \frac{1}{2} \times 30 \times (1 - 0.209) = 11.9 \text{ (Hz)}$$

③ 内輪に対する保持器相対回転周波数： f_{cr}

$$f_{cr} = \frac{1}{2} f_r (1 + \gamma) = \frac{1}{2} \times 30 \times (1 + 0.209) = 18.1 \text{ (Hz)}$$

④ 転動体自転周波数： f_B

$$f_B = \frac{1}{2} \frac{D_w}{D_{pw}} f_r (1 - \gamma^2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{0.209} \times 30 (1 - 0.209^2) = 68.6 \text{ (Hz)}$$

2) 転動体通過振動

1次 ($n = 1$) の振動数を求める。

$$f_p = nZf_c = 9 \times 11.9 = 107 \text{ (Hz)}$$

3) 部品にきずがある場合の振動

1次 ($n = 1$) の振動数を求める。

① 外輪にきずがある場合

静止輪にきずがある場合には、転動体通過振動

$$f_p = nZf_c = 9 \times 11.9 = 107 \text{ (Hz)}$$

② 内輪にきずがある場合

$$f = nZf_{cr} = 163 \text{ (Hz)}$$

回転数変動が掛かった場合は、

$$f = nZf_{cr} \pm f_r = 163 \pm 30 = 133 \text{ (Hz), } 193 \text{ (Hz)}$$

③ 転動体にきずがある場合

$$f = 2nf_B = 2 \times 68.6 = 137 \text{ (Hz)}$$

回転数変動が掛かった場合は、

$$f = 2nf_B \pm f_c = 2 \times 68.9 \pm 11.9 = 149 \text{ (Hz), } 125 \text{ (Hz)}$$

4) 変形による振動

$Z = 9$ の時、変形がある場合の特徴的な角数と発生周波数は下表となる。

1次 ($n = 1$) の振動数を求める。

部位	変形角数	振動方向	発生周波数 (Hz)
			内輪回転
内輪	8または10	径方向	133, 193
	9	軸方向	163
外輪	8または10	径方向	107
	9	軸方向	
転動体	2	径方向	125, 149
		軸方向	137

【計算例】軸受の固有振動

(7-2) 深溝玉軸受 6206 に $F_a = 80$ (N) のアキシャル荷重が作用している時、軸受の固有振動数を求める。

1) 曲げたわみ固有振動数

$$f_n = \frac{n(n^2 - 1)}{\sqrt{n^2 + 1}} K_n \quad \text{より } f_n \text{ を求める。}$$

表 7.2 より 6206 の場合、 $K_n = 1.184 \times 10^3$
 $n = 2 \sim 4$ の時の f_n は下表となる。

曲げたわみ固有振動数

モード	n	K_n	f_n Hz
1次	2	1.184×10^3	3 177
2次	3		8 985
3次	4		17 229

2) 軸方向固有振動数

表 7.3 より 6206 の場合の K_T を求め下式より算出する。

$$f_T = K_T T^{3/8} \quad K_T = 2.42 \times 10^2$$

3) 径方向固有振動数

表 7.4 より 6206 の場合の K_R を求め下式より算出する。

$$f_R = K_R T^{1/8} \quad K_R = 33.57 \times 10^2$$

4) 傾斜方向固有振動数

表 7.5 より 6206 の場合の K_M を求め下式より算出する。

$$f_M = K_M T^{3/8} \quad K_M = 1.90 \times 10^2$$

固有振動数計算結果

振動の方向	アキシャル荷重 N	係数	固有振動数 Hz	
軸方向	8	2.42×10^2	f_T	1 250
径方向		33.57×10^2	f_R	5 806
傾斜方向		1.90×10^2	f_M	984